Μάθημα 6ο

04/03/16

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1:

$O(\alpha) = 24 = |0|$, $(O = <\alpha>, \cdot)$

Να βρεθούν όλα τα στοιχεία τάξης 4 $\alpha^{\kappa} \in O$ ώστε $O(\alpha^{\kappa}) = 4$, $0 \leq \kappa \leq 23$

$(\mathbb{Z}_{24} = \{[0], [1], \ldots, [23]\}, \oplus)$

$(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}^{+}, \cdot)$

$x \longmapsto e^{x}$

$x+y \longmapsto e^{x+y} = e^{x}e^{y}$

$O(\alpha^{\kappa}) = 4 = \frac{O(\alpha)}{(O(\alpha), \kappa)} = \frac{24}{(24, \kappa)} = 4 \Rightarrow (24, \kappa) = 6.$

$(2^{3} \cdot 3, \kappa) = 2 \cdot 3$

$\kappa \equiv$ της μορφής $2 \cdot 3$, μόνο αυτό;

$= \cancel{2 \cdot 3}$

$\kappa = 2^{1} \cdot 3^{\ell}$, $1 \leq \ell \leq 2$ αφού $1 \leq \kappa \leq 23$

ή $\kappa = 2 \cdot 3^{\ell} \cdot 5^{0}$

Επειδή $\kappa \leq 23$ και $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 23 \Rightarrow$ Δεν υπάρχει το 5

Τελικά έχουμε $\kappa = 2 \cdot 3$ ή $\kappa = 2 \cdot 3^2$

ΑΣΚΗΣΗ 2:

$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \mathbb{Z}_7^*$

$\alpha \square \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha\beta - \gamma = 7\kappa$

- Πράξη κλειστή:

Επειδή $\gamma \in G$, πρέπει το γ να είναι το υπόλοιπο του $\alpha\beta$ δια 7.

- Προσεταιριστική:

$\underbrace{(\alpha \square \beta)}_{\delta} \square \gamma = \alpha \square \underbrace{(\beta \square \gamma)}_{\varepsilon}$

$\alpha\beta - \delta = 7\kappa \Rightarrow \alpha\beta - 7\kappa = \delta$

$\beta\gamma - \varepsilon = 7\lambda \Rightarrow \beta\gamma - 7\lambda = \varepsilon$

$\delta \square \gamma = \zeta$

$\delta\gamma - \zeta = 7\mu$

$(\alpha\beta - 7\kappa)\gamma - \zeta = 7\mu \Rightarrow \alpha\beta\gamma - 7\kappa\gamma - \zeta = 7\mu \Rightarrow \alpha\beta\gamma - \zeta = 7\nu$ (+)

$\alpha \square \varepsilon = \eta \Leftrightarrow \alpha\varepsilon - \eta = 7\xi$

$\alpha(\beta\gamma - 7\lambda) - \eta = 7\xi \Rightarrow \alpha\beta\gamma - \alpha 7\lambda - \eta = 7\xi \Rightarrow \alpha\beta\gamma - \eta = 7\pi$ (++)

$1 \leq \zeta, \eta \leq 6$ (+++)

Τελικά $\eta = \zeta$

◦ Μοναδιαίο 1: Πρέπει $a \square 1 = a \Leftrightarrow a\,1 - a = 7\kappa \Leftrightarrow \kappa = 0$ ισχύει

◦ Αντίστροφος:

$\forall a \in G \Rightarrow \exists \beta \quad a \square \beta = 1 \Leftrightarrow a\beta - 1 = 7\kappa \Leftrightarrow a\beta - 7\kappa = 1 \Leftrightarrow (a, 7) = 1$

Αν $\delta = (a, \beta)$, τότε υπάρχουν $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ ώστε $a\kappa + \beta\lambda = \delta$

Επειδή $a \in G \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 6 \Rightarrow (a, 7) = 1$.

G ομάδα, κυκλική $\Leftrightarrow$ βρες $a \in G$ ώστε $G = \langle a \rangle = \{a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6\}$

$\Phi(7) = 6$

Ζητάμε $a^{\Phi(7)} = 1$ και $O(a) = 6$, a πρωταρχική ρίζα

2, $2^2 \equiv 4$, $2^3 \equiv 8 \equiv 1$ δεν είναι

3, $3^2 = 9 \equiv 2$, $3^3 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6$, $3^4 = 6 \cdot 3 = 18 \equiv 4$, $3^5 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 5$

$3^6 = 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 1$

Άρα $G = \langle 3 \rangle$, $\mathbb{Z}_p^*$, p πρώτος $\Rightarrow \mathbb{Z}_p^*$ κυκλική

ΑΣΚΗΣΗ 3:

$\mathbb{Z}$, $n \square m = n + m - 1$

$(\mathbb{Z}, \square)$ κυκλική ομάδα

$n + m - 1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ Πράξη καλά ορισμένη

◦ Προσεταιριστική

$(n \square m) \square \kappa = n \square (m \square \kappa)$

$(n + m - 1) + \kappa - 1 = n + (m + \kappa - 1) - 1$ Ισχύει

◦ Ουδέτερο - μοναδιαίο:

Βρες $e \in \mathbb{Z}$ ώστε $a \square e = a = e \square a$

$a \square e = a + e - 1 = a \Rightarrow e = 1$

$1 \square a = 1 + a - 1 = a$ Ισχύει

◦ Αντίθετος - αντίστροφος

Βρες $\beta \in \mathbb{Z}$ ώστε $a \square \beta = 1 \Leftrightarrow a + \beta - 1 = 1 \Rightarrow \beta = 2 - a$

Ομάδα αβελιανή: $a \square \beta = \beta \square a$.

Γεννήτορες 0 ή 2. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ακέραιος κ δίνεται σαν άθροισμα του 0 ή 2 με τον εαυτό του. Έστω x γεννήτορας.

$\alpha = \underbrace{x \square x \square x \square \cdots \square x}_{\kappa\text{-φορές}}$ (+)

$x \square x \square \cdots \square x = \kappa x - \kappa + 1$

Με επαγωγή

Για τους θετικούς για $x^{-\kappa}$ θα πάρουμε τον αντίθετο του x $(x^{-1})^{\kappa}$

Να βρεθεί ο ευθέτης κ ώστε $\underbrace{x \square \cdots \square x}_{\kappa} = x^{\kappa} = \alpha$ (++) $, \alpha > 0$.

Από τις (+) και (++) έχουμε $\alpha = \kappa x - \kappa + 1 \Rightarrow \kappa = \dfrac{\alpha - 1}{x - 1}$

1) $x - 1 \neq 0$, 2) $x - 1 \mid \alpha - 1$ γιατί $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}$

Άρα, πρέπει $x-1 = 1$ ή -1 γιατί μόνο αυτοί οι ακέραιοι, διαιρούν κάθε ακέραιο, δηλ. $x = 2$ και $x = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$Q = \left\{ \underset{a_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{a_2}{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}, \underset{a_3}{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}, \underset{a_4}{\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}} \right\} \subseteq GL(2, \mathbb{C})$$

Πράξη καλά ορισμένη $\Rightarrow Q \leq GL(2, \mathbb{C})$

$a_3 Q = \{a_3 a_1, a_3 a_2, a_3 a_3, a_3 a_4\} \underset{(i)}{=} Q$

Αν $a_3 Q \subsetneq Q \Rightarrow \exists i$ και j ώστε $i \neq j$ και $a_3 a_i = a_3 a_j$

$\left.\begin{array}{l} (a_3)(j) = (a_3)(ij) \\ \exists a_3^{-1} \in GL(2, \mathbb{C}) \end{array}\right\} \Rightarrow a_3^{-1} a_3 a_i = a_3^{-1} a_3 \cdot a_j \Rightarrow a_i = a_j$ Αδύνατο.

$a_3 Q = Q \Rightarrow a_3 \in Q \Rightarrow a_3 \in a_3 Q \Rightarrow$

$\exists i = 1, \ldots, 4$ ώστε $a_3 = a_3 \cdot a_i$. Αυτά είναι στοιχεία της $GL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a_3^{-1} \in GL(2, \mathbb{C})$

$a_3^{-1} a_3 = a_3^{-1} a_3 a_i \to a_i = 1_{GL(2,\mathbb{C})}$

Εμείς περιμένουμε το a_i να είναι το μοναδιαίο (Για το παράδειγμα είναι το a_1)
Για τον αντίστροφο
Δείξαμε ότι το $a_1 = 1_{GL(2,\mathbb{C})} \in O$

$a_1 \in a_3 O \Rightarrow \exists j, j = 1, \ldots, 4$ ώστε $a_1 = a_3 \cdot a_j$.

Άρα, $a_j = a_3^{-1} \in GL(2,\mathbb{C})$ μοναδιαίο
Άρα, ο αντίστροφος του $a_3 \in O$.

Αν $O = \langle a \rangle$ και $H \leq O \Rightarrow H$ κυκλική
Δηλαδή, $\exists a^k \in O$ με $H = \langle a^k \rangle = \{a^{\pm k}, a^{\pm 2k}, a^{\pm 3k}, \ldots\}$
$|H| \mid |O|$ όταν είναι πεπερασμένη.

Αν $m \mid |O| \Rightarrow \exists H \leq O$ με $|H| = m$
Αν $H_1, H_2 \leq O$ και $|H_1| = |H_2| \Rightarrow H_1 = H_2$
Αυτό δεν σημαίνει ότι απαραίτητα έχουν τον ίδιο γεννήτορα

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $O = \langle a \rangle$ κυκλική. Τότε $\langle a^k \rangle = \langle a^s \rangle \Leftrightarrow (n,k) = (n,s)$ όπου $n = |O|$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\langle a^k \rangle = \langle a^s \rangle \Leftrightarrow O(a^k) = O(a^s) \Leftrightarrow \dfrac{n}{(n,k)} = \dfrac{n}{(n,s)} \Leftrightarrow (n,k) = (n,s)$.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αυτά δεν ισχύουν για όλες τις ομάδες.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Έστω $O = \langle a \rangle$ με τάξη n και $d_1, \ldots, d_k$ όλοι οι διακεκριμμένοι διαιρέτες του n. Τότε οι υποομάδες $\langle a^{d_1} \rangle, \langle a^{d_2} \rangle, \ldots, \langle a^{d_k} \rangle$ είναι ΟΛΕΣ οι υποομάδες της O.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Βρείτε όλες τις υποομάδες της $(\mathbb{Z}_{12}, \oplus)$

$\mathbb{Z}_{12} = \langle [1] \rangle = \langle [5] \rangle = \langle [7] \rangle = \langle [11] \rangle$

Βρες όλους τους διαιρέτες 1, 2, 3, 4, 6, 12

$\langle 1[1] \rangle, \langle 2[1] \rangle, \langle 3[1] \rangle, \langle 4[1] \rangle, \langle 6[1] \rangle, \langle 12[1] \rangle$

$\langle [1] \rangle, \langle [2] \rangle, \langle [3] \rangle, \langle [4] \rangle, \langle [6] \rangle, \langle [12] \rangle$

$\langle [1] \rangle = \mathbb{Z}_{12}$, $\langle [2] \rangle \to$ τάξη 6, $\langle [3] \rangle \to 4$, $\langle [4] \rangle \to 3$, $\langle [6] \rangle \to 2$, $\langle [12] \rangle = \langle [0] \rangle$ τετριμμένη $\to 1$

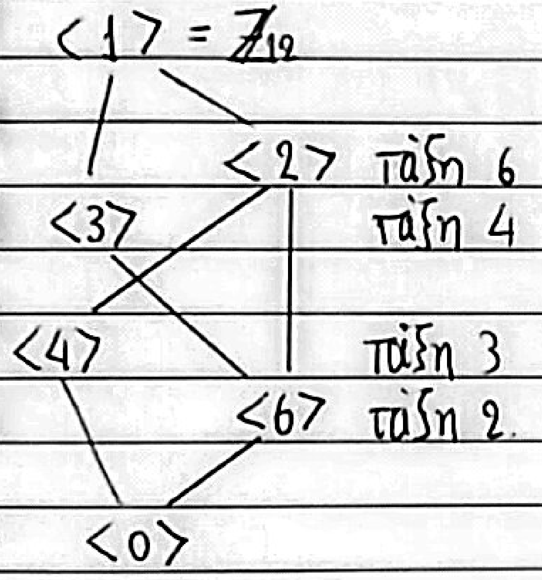
$\langle 2 \rangle = \{2, 4, 6, 8, 10, 0\}$

$\langle 3 \rangle = \{3, 6, 9, 0\}$

$\langle 4 \rangle = \{4, 8, 0\}$

$\langle 6 \rangle = \{6, 0\}$

$\langle 0 \rangle = \{0\}$



ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $G = \langle a \rangle$ είναι άπειρη κυκλική, τότε όλες οι $\langle a^k \rangle$ με $k \in \mathbb{N}$ είναι διακεκριμμένες υποομάδες. Επίσης $\langle a^k \rangle \leq \langle a^m \rangle$ ανν $m | k$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$

$k \in \mathbb{N} \Rightarrow \langle k \rangle = k\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$k\mathbb{Z} \leq m\mathbb{Z} \Leftrightarrow m | k$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:

1) Στην ομάδα G το στοιχείο a έχει τάξη 18. Να βρεθούν οι τάξεις των στοιχείων $a^2, a^3, a^4, a^5, a^7, a^{12}$

2) Να βρείτε τα στοιχεία τάξης 15 στην $\mathbb{Z}_{45}$. Να βρεθούν όλες οι διακεκριμμένες υποομάδες της.

3) Βρείτε όλες τις υποομάδες της Q_8 και δείξτε ότι είναι κυκλικές (γνήσιες υποομα)

4) Δείξτε ότι δεν μπορεί μια ομάδα να είναι ένωση δύο κύριων υποομάδων της:
$H, K \lneq G \not\Rightarrow G = H \cup K$.

ΣΥΜΕΤΡΙΕΣΝ

$\Sigma_3 = \{f\ \{1,2,3\} \xrightarrow[\text{επι}]{\text{"1-1"}} \{1,2,3\}\}$. $\quad |\Sigma_3| = 6$

Γίνεται ομάδα με τη σύνθεση των απεικονίσεων
$(f \circ g)(i) = f(g(i))$

$V_1 R'(2) = V_1(R'(2)) = V_1(1) = 1$

$R' V_1(2) = R'(3) = 2 \neq$ ΟΧΙ ΑΒΕΛΙΑΝΗ

$\Sigma_v = \{f: \{1, 2, \ldots, v\} \xrightarrow[\text{επι}]{\text{"1-1"}} \{1, 2, \ldots, v\}\} \quad |\Sigma_v| = v!$
με τη σύνθεση ομάδα.

$$\left.\begin{array}{l} 1 \to v \\ 2 \to v-1 \\ \vdots \\ v \to 1 \end{array}\right\} \quad v(v-1)\cdots 1$$

Συμμετρική ομάδα σε v στοιχεία